

I 42,3,4

Александръ Губертъ

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE
de Kasan

Deuxième serie. Tome I. № 1.

Казань. Императорск. физико-математическое общество.

Q
60
K21
A2
ИЗВѢСТІЯ

Извѣстія

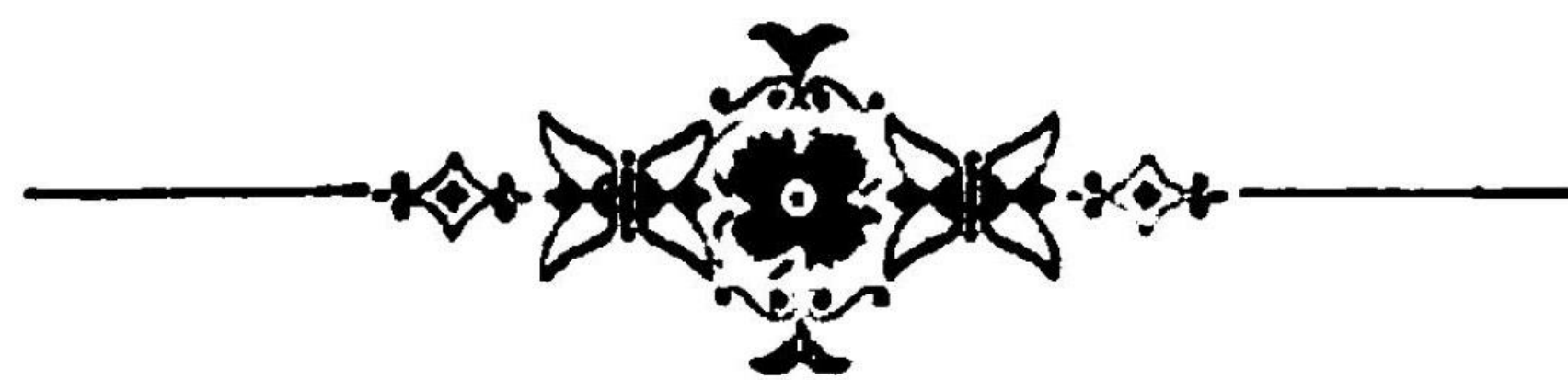
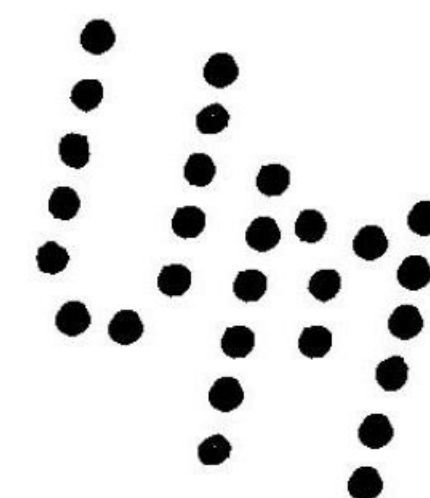
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ I

№ I



КАЗАНЬ

Типографія Императорскаго Университета

1891

СОДЕРЖАНІЕ.

I.

- А. Васильевъ.** Изъ исторіи и философіи понятія о цѣломъ положительномъ числѣ.
- Г. Шебуевъ.** Къ вопросу о распространеніи теплоты въ текущей жидкости путемъ теплопроводности и конвекціи.
- И. Долбня.** Объ интегрированіи посредствомъ эллиптическихъ функцій.
- Я. Корнухъ-Троцкий.** Наблюденіе съ Казанской обсерваторіи метеорнаго потока «персеидъ» 10 августа 1890 года.

II.

Лѣтопись Физико-математическаго Общества.

- Уставъ Физико-математическаго Общества.
- Списокъ членовъ Физико-математическаго Общества въ октябрѣ 1890 г.
- Протоколы 1—5 засѣданій Физико-математическаго Общества.
- Списокъ книгъ поступившихъ въ бібліотеку Общества.
- Ө. Суворовъ.** Библиографическій отзывъ о «Сборникѣ упражненій въ умственномъ счетѣ» Н. Бобровникова.
- Объявленія.

Table des matières.

- A. W a s s i l i e f f. Sur l'histoire et philosophie de la notion du nombre entier et positif.
- G. S t e b o u i e f f. Sur la propagation de la chaleur dans le fluide coulant au moyen de la conductibilité et de la convection.
- I. D o l b n i a. Intégration au moyen des fonctions elliptiques.
- J. C o r n o u k h - T r o t z k y. Observation des Perséides à l'Observatoire de Kasan, le 10 aout 1890.
- Statuts de la Société Physico-mathématique.
- Liste des membres de la Société Physico-mathématique.
- Procès-verbaux des séances (1—5) de la Société Physico-mathématique.
- Liste des ouvrages reçus par la bibliothèque de la Société.
- Th. S o u v o r o f f. Notice bibliographique.
- Annonces.
-

*Kazan. Universitet. Fiziko-matematicheskoe
obshchestvo.*

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE
de Kasan

Deuxième serie. Tome I. № 1.

Q
60
.K21
A2

ИЗВѢСТІЯ

Izviestia

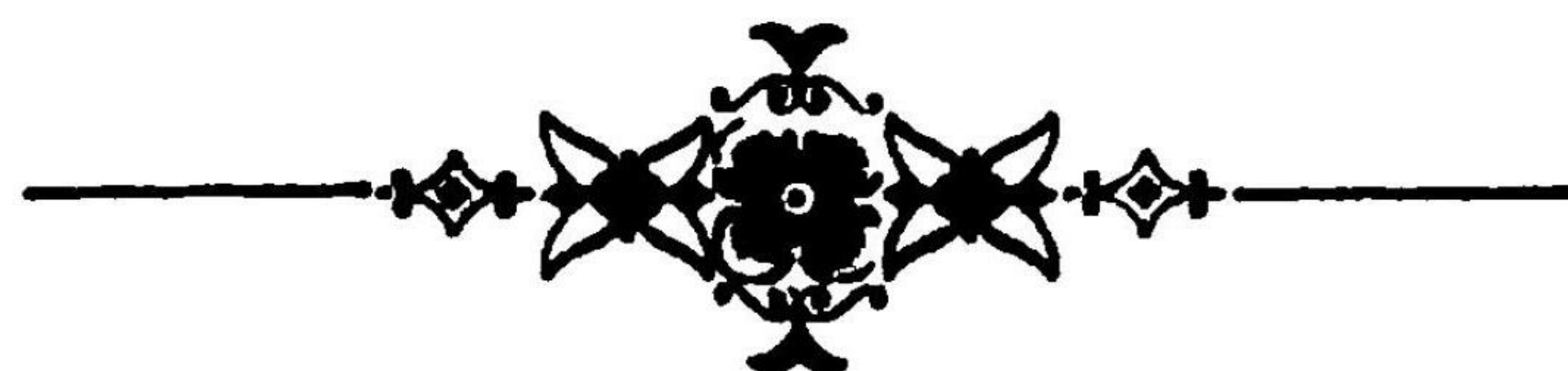
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

~~~~~  
ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ I

№ I



КАЗАНЬ

Типографія Императорскаго Университета

1891



## ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНИИ ПОСРЕДСТВОМЪ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

### § 1.

Въ посмертномъ мемуарѣ „Théorie des transcendentes elliptiques“ (¹) Абель занимается приведеніемъ интеграла

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt{R}},$$

гдѣ  $F$  и  $F_1$  цѣлыя рациональныя функціи,

$$R = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4.$$

Алгебраическое изученіе вопроса приводитъ знаменитаго автора къ заключенію, что всякій эллиптическій интегралъ можетъ быть выраженъ при помощи четырехъ интеграловъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

Въ настоящее время задача, поставленная Абелемъ, можетъ быть рѣшена, съ большимъ успѣхомъ, при помощи эллиптическихъ функцій Weierstrass'a. Употребляя эти функціи, можно доказать, что всякій эллиптическій интегралъ выражается алгебраическою функціею и тремя неприводимыми эллиптическими интегралами

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{u}{\sqrt{a_0}}, \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right) du, \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 du.$$

---

(¹) Oeuvres complètes, t. 2., 1881, p. 87.



Кромѣ того можно дать простые приемы выраженія всякаго эллиптическаго интеграла функциями Weierstrass'a. Рѣшеніе этой задачи, только въ другой формѣ, составляетъ содержаніе VII главы сочиненія Halphen'a „Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications“, t. 1, 1886. Но въ этой главѣ покойный авторъ рѣшаетъ, въ сущности, очень частный вопросъ, а именно: приведеніе къ интегрируемой формѣ рациональной функции отъ  $z$  и  $\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}$ . Кромѣ того Halphen показываетъ лишь духъ методы; осуществленіе же методы на практикѣ сопряжено съ большими трудностями. Въ этой статьѣ я излагаю методъ рѣшенія задачи Абеля во всей ея общности и даю простѣйшее средство приведенія всякаго эллиптическаго интеграла къ функциямъ Weierstrass'a. Предлагаемая задача находится въ связи съ обращеніемъ эллиптическихъ интеграловъ, которымъ займемся прежде всего.

Полагая

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \xi,$$

получимъ

$$R = a_0(\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4) = a_0R_1,$$

гдѣ

$$\alpha_2 = \frac{a_2a_0 - a_1^2}{a_0^2}, \quad \alpha_3 = \frac{a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3}{a_0^3}.$$

Положимъ

$$\sqrt{R_1} = \sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4} = \xi^2 + \alpha_2 - 2z.$$

Уничтожая здѣсь радикаль, дадимъ уравненію двѣ формы:

$$\begin{aligned} 4(\alpha_2 + z)\xi^2 + 4\alpha_3\xi - (4z^2 - 4\alpha_2z + \alpha_2^2 - \alpha_4) &= 0, \\ 4z^2 - 4(\alpha_2 + \xi^2)z - 4(\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi - \alpha_2^2 + \alpha_4) &= 0, \end{aligned}$$



откуда имѣемъ

$$\xi = \frac{-\alpha_3 \pm \sqrt{4z^3 - (3\alpha_2^2 + \alpha_4)z - (\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2 - \alpha_2^3)}}{2(z + \alpha_1)}.$$

$$z = \frac{\alpha_2 + \xi^2 \pm \sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}}{2}.$$

На этомъ основаніи

$$\frac{d\xi}{\sqrt{R_1}} = \pm \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}},$$

гдѣ

$$g_2 = 3\alpha_2^2 + \alpha_4, \quad g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2 - \alpha_2^3.$$

Полагая  $\alpha_1 = -p\nu$ , получимъ  $\alpha_3 = p'\nu$ ,

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'\nu}{pu - p\nu},$$

$$x = -\frac{\alpha_1}{a_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'\nu}{pu - p\nu}, \quad \sqrt{R_1} = \pm \left\{ p(u + \nu) - pu \right\}.$$

Значитъ

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \int \left[ -\frac{\alpha_1}{a_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'\nu}{pu - p\nu} \right]^m du.$$

Займемся теперь приведеніемъ подынтегральной функціи

$$\left( -\frac{\alpha_1}{a_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'\nu}{pu - p\nu} \right)^m \dots \dots \dots (1)$$

въ интегрируемой формѣ. Раскрывая скобки въ (1), мы получимъ совокупность членовъ вида

$$A \left( \frac{p'u - p'\nu}{pu - p\nu} \right)^n.$$

Если  $n = 2k$ , то преобразованію подлежитъ формула

$$\left[ \left( \frac{p'u - p'\nu}{pu - p\nu} \right)^2 \right]^k;$$



если же  $n = 2k + 1$ , то преобразованію подлежит формула

$$\left[ \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 \right]^k \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \dots \dots \dots (3).$$

Отсюда слѣдуетъ, что прежде всего надлежитъ привести къ интегрируемой формѣ двѣ дроби

$$\left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 \text{ и } \frac{p'u - p'v}{pu - pv}.$$

## § 2.

Эллиптическая функція

$$Y = \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2$$

обращается въ безконечность для  $u = 0$ ,  $u + v = 0$ . При  $u = 0$  функція имѣетъ безконечность втораго порядка, и для безконечно-малаго  $u$  главный членъ въ разложеніи  $Y$  будетъ, очевидно,

$$\left( -\frac{2}{u^3} : \frac{1}{u^2} \right)^2 = \frac{4}{u^2},$$

и потому можно взять

$$Y = 4pu + Y_1,$$

гдѣ  $Y_1$  есть двояко-періодическая функція, не обращающаяся въ безконечность для  $u = 0$ . Въ самомъ дѣлѣ

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{p'^2u - 2p'vp'u + p'^2v - 4p^2u + 8pvp^2u - 4p^2vpu}{(pu - pv)^2} = \\ &= \frac{8pvp^2u - (g_2 + 4p^2v)pu - 2p'vp'u + p'^2v - g_2}{(pu - pv)^2}. \end{aligned}$$

Дѣлая  $u = 0$ , получимъ

$$\lim [Y_1]_{u=0} = \frac{8p^v}{u^4} : \frac{1}{u^4} = 8p^v.$$

Итакъ при  $u = 0$   $Y_1$  стремится къ конечному предѣлу  $8p^v$ . Видно, кромѣ того, что  $Y_1$  имѣетъ безконечность втораго порядка при  $u + v = 0$ .



При безконечно-маломъ  $(u + v)$  главный членъ въ разложеніи  $Y_1$ , или, что все равно, въ разложеніи  $Y$  найдется слѣдующимъ образомъ. Имѣемъ

$$p(u) = p(-v + u + v) = pv - (u + v)p'v + \frac{(u + v)^2}{2}p''v - \dots,$$

слѣдовательно

$$pu - pv = -(u + v)p'v + \frac{(u + v)^2}{2}p''v - \frac{(u + v)^3}{6}p'''v + \dots$$

Ясно отсюда, что искомый главный членъ есть

$$\frac{4}{(u + v)^2},$$

а потому

$$Y_1 = 4p(u + v) + Y_2,$$

гдѣ  $Y_2$  не обращается въ безконечность при  $u + v = 0$ . Чтобы это доказать, замѣтимъ, что

$$\begin{aligned} & \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 - 4p(u + v) = \\ &= \frac{\left[ -2pv + (u + v)p''v - \frac{(u + v)^2}{2}p'''v + \dots \right]^2}{(u + v)^2 \left[ -p'v + \frac{u + v}{2}p''v - \frac{(u + v)^2}{6}p'''v + \dots \right]^2} - \frac{4}{(u + v)^2} + \varphi, \end{aligned}$$

гдѣ  $\varphi$  обращается въ нуль вмѣстѣ съ  $(u + v)$ .

Или

$$\left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 - 4p(u + v) = \frac{(u + v)^2 \left[ \frac{2}{3}p'vp'''v + \psi \right]}{(u + v)^2 \left[ -p'v + \frac{u + v}{2}p''v - \dots \right]^2} + \varphi,$$

гдѣ  $\psi$  обращается въ нуль вмѣстѣ съ  $(u + v)$ . А потому

$$\lim \left[ \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 - 4p(u + v) \right]_{u+v=0} = \frac{2}{3} \frac{p'''v}{p'v} = 8pv.$$



А потому

$$\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 = 4pu + 4p(u + v) + f(v),$$

гдѣ  $f(v)$  не зависитъ отъ  $u$ . Перемѣнная въ этомъ равенствѣ  $u$  на  $v$ , получимъ

$$\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 = 4pv + 4p(u + v) + fu,$$

отсюда

$$4pv + 4p(u + v) + fu = 4pu + 4p(u + v) + fv,$$

отсюда

$$fu - fv = 4(pu - pv),$$

слѣд.

$$f'v = 4p'v,$$

$$fv = 4pv + \text{постоян.},$$

слѣдов.

$$\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 = 4pu + 4pv + 4p(u + v) + \text{пост.};$$

постоянная второй части не зависитъ ни отъ  $u$ , ни отъ  $v$ ; для опредѣленія ея положимъ

$$u = \omega, \quad v = \omega',$$

тогда

$$p'u = 0, \quad p'v = 0, \quad pu = e_1, \quad pv = e_2, \quad p(u + v) = e_3,$$

и мы получимъ

$$\text{постоян.} = -4(e_1 + e_2 + e_3) = 0.$$

А потому окончательно

$$\frac{1}{4} \left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 = p(u + v) + pu + pv \dots \dots \dots (4)$$

извѣстная формула сложения аргументовъ.



Другую основную формулу

$$p'v \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} = p''v - 2(pu - pv)[p(u + v) - pv] \dots \quad (5)$$

заимствуемъ прямо изъ сочиненія *Halphen'a* „Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications“, 1886, Т. 1, р. 118. Доказательство этой формулы не представляетъ никакихъ затрудненій.

### § 3.

Всякая функція вида

$$\left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^{2k} = (4pu + 4pv + 4p(u + v))^k,$$

по раскрытіи скобокъ представится суммою членовъ вида

$$Ap^{\alpha}u p^{\beta}(u + v),$$

гдѣ  $A$  постоянный коэффициентъ,  $\alpha$  и  $\beta$  цѣлыя положительныя числа. Чтобы дать этому члену интегрируемую форму, достаточно обнаружить духъ методы на частномъ примѣрѣ. Изслѣдуемъ для этой цѣли двоякоперіодическую функцію

$$z = p^3u p^3(u + v).$$

Функція эта обращается въ безконечность шестаго порядка при  $u=0$  и въ безконечность четвертаго порядка при  $u + v = 0$ . На этомъ основаніи  $z$  содержитъ слагаемое

$$z_1 = p^3v p^3u.$$

Имѣемъ

$$z - z_1 = p^3u p^3(u + v) - p^3v p^3u,$$

или

$$z - z_1 = p^3u [p(u + v) + pv][p(u + v) - pv];$$

Но

$$p^3u = \left[ \frac{1}{u^3} + \frac{1}{20}g_2u^2 + \frac{1}{28}g_3u^4 + \dots \right]^3,$$



а потому содержит члены

$$\frac{1}{u^2}, \frac{3}{20}g, \frac{1}{u^2};$$

кроме того

$$p(u+v) - pv = up'v + \frac{u^2}{2} p''v + \\ + \frac{u^3}{6} p'''v + \frac{u^4}{24} p^{(iv)}v + \frac{u^5}{120} p^{(v)}v + \dots$$

На этомъ основаніи  $z_1 - z$  содержит члены

$$\frac{2pvp'v}{u^4}, \frac{pvp''v}{u^4}, \frac{pvp'''v}{3u^3}, \frac{1}{12} \frac{pvp^{(iv)}v}{u^2}, \frac{1}{60} \frac{pvp^{(v)}v}{u}, \frac{3}{10}g, \frac{pvp'v}{u}.$$

Слѣдовательно нужно взять

$$z - z_1 = - \frac{pvp'v}{12} p'''u + \frac{pvp''v}{6} p''u - \frac{pvp'''v}{6} p'u + \frac{pvp^{(iv)}v}{12} pu + \\ + \left( \frac{pvp^{(v)}v}{60} + \frac{3}{10}g, pvp'v \right) zu + z_2,$$

гдѣ  $z_2$  зависитъ отъ безконечности  $u+v=0$ .

Поэтому нужно взять

$$z_2 = p^3vp^2(u+v).$$

Имѣемъ

$$z - z_2 = p^2(u+v)(p^3u - p^3v),$$

или

$$z - z_2 = p^2(u+v)(p^3u + p^2vp + p^3v)(pu - pv).$$

Извѣстно, что

$$p^2(u+v) = \left[ \frac{1}{(u+v)^2} + \frac{1}{20}g, (u+v)^2 + \dots \right]^2,$$

а потому содержитъ членъ

$$\frac{1}{(u+v)^4}, \\ pu - pv = - (u+v)p'v + \frac{(u+v)^2}{2} p''v - \frac{(u+v)^3}{6} p'''v + \dots$$



Значитъ  $z-z$ , содержать члены

$$-3p^2vp'v \cdot \frac{1}{(u+v)^2}, \quad \frac{3}{2}p^2vp''v \cdot \frac{1}{(u+v)^2}, \quad -\frac{p^2vp'''v}{2} \cdot \frac{1}{(u+v)}.$$

На этомъ основаніи въ составъ  $z-z$ , входятъ члены

$$\frac{3}{2}p^2vp'vp'(u+v) + \frac{3}{2}p^2vp''vp(u+v) - \frac{1}{2}p^2vp'''v\zeta(u+v);$$

слѣдовательно

$$\begin{aligned} p^2up^2(u+v) &= p^2vp^2u - \frac{1}{2}pvp'vp'''u + \frac{1}{6}pvp''vp'u - \frac{1}{6}pvp'''vp'u + \\ &+ \frac{1}{12}pvp^{(iv)}vpu + \left( \frac{1}{60}pvp^{(iv)}v + \frac{3}{10}g_2p^2vp'v \right) \zeta u + p^2vp^2(u+v) + \\ &+ \frac{3}{2}p^2vp'vp'(u+v) + \frac{3}{2}p^2vp''vp(u+v) - \frac{1}{2}p^2vp'''v\zeta(u+v) + C, \end{aligned}$$

гдѣ  $C$  не зависитъ отъ  $u$ . Или

$$\begin{aligned} p^2up^2(u+v) &= \frac{1}{120}p^2vp^{(iv)}u + \frac{3}{20}g_2p^2vp'u + \frac{1}{6}p^2vp''(u+v) - \\ &- \frac{1}{12}pvp'vp'''u + \frac{1}{6}pvp''vp'u - \frac{1}{6}pvp'''vp'u + \\ &+ \frac{1}{12}pvp^{(iv)}u + \frac{3}{20}p^2vp'vp'(u+v) + \frac{3}{2}p^2vp''vp(u+v) + \\ &+ \frac{1}{12}p^2vp'''v[\zeta(u+v) - \zeta u] + \frac{1}{10}g_2p^2v + \frac{1}{12}g_2p^2v + C. \end{aligned}$$

Постоянная  $C$  всегда можетъ быть найдена, полагая  $u = v$ , но нахожденіе это въ данномъ случаѣ бесполезно. Полученная форма есть, очевидно, интегрируемая, такъ что

$$\begin{aligned} \int p^2up^2(u+v)du &= \frac{1}{120}p^2vp''u + \frac{1}{6}p^2vp'(u+v) - \frac{1}{12}pvp'vp''u + \\ &+ \frac{1}{6}pvp''vp'u - \frac{1}{6}pvp''vpu + \frac{3}{2}p^2vp'vp(u+v) + \\ &+ \left( \frac{3}{20}g_2p^2v + \frac{1}{12}pvp^{(iv)}v \right) \zeta u - \frac{3}{2}p^2vp''v\zeta(u+v) - \\ &- \frac{1}{2}p^2vp''v \log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} + \left( \frac{1}{10}g_2p^2v + \frac{1}{12}g_2p^2v + C \right) u + \end{aligned}$$



§ 4.

Применимъ выясненную методу къ нахожденію интеграла

$$\int \left[ \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right]^6 du.$$

Имѣемъ

$$\frac{1}{4} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 - pv = pu + p(u + v),$$

слѣдовательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^4 - \frac{1}{2} pv \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 &= p^2u + p^2(u + v) - p^2v + \\ &+ 2pup(u + v) \dots \dots \dots (6). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{64} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^6 - \frac{3}{16} pv \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^4 + \frac{3}{4} p^2v \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 &= p^3u + \\ &+ p^3(u + v) + p^3v + 3p^2up(u + v) + 3pup^2(p + v) \dots \dots (7). \end{aligned}$$

Надлежитъ найти интегрируемую форму для трехъ произведеній

а)  $2pup(u + v)$ , б)  $3p^2up(u + v)$ , в)  $3pup^2(u + v)$ .

а) Имѣемъ

$$pup(u + v) - pupv = pu[p(u + v) - pv] = pu[up'v + \frac{u^2}{2}p''v + \dots];$$

значитъ

$$pup(u + v) = pvpri + p'v\zeta u + \dots \dots \dots ,$$

гдѣ точками обозначены члены, не зависящіе отъ безконечности  $u = 0$ .

Имѣемъ

$$\begin{aligned} pup(u + v) - pvp(u + v) &= p(u + v)(pu - pv) = \\ &= p(u + v)[-(u + v)p'v + \frac{(u + v)^2}{2}p''v - \dots], \end{aligned}$$

значитъ

$$pup(u + v) = pvp(u + v) - p'v\zeta(u + v) + \dots \dots \dots ,$$



слѣдовательно

$$rip(u+v) = rirv + rvpr(u+v) + p'v \{ \zeta u - \zeta(u+v) + \zeta v \} + C,$$

гдѣ  $C$  постоянная. Полагая  $u=v$ , имѣемъ

$$C + p^2v - \frac{p'v}{2} \frac{p''v}{p'v} = 0,$$

$$C = -p^2v + \frac{p'v}{2} = 2p^2v - \frac{1}{4}g_2;$$

слѣдовательно

$$\begin{aligned} 2rip(u+v) &= 2rvri + 2rvpr(u+v) + 2p'v \{ \zeta u - \zeta(u+v) + \zeta v \} + \\ &+ 4p^2v - \frac{1}{2}g_2 \dots \dots (8), \end{aligned}$$

б) Имѣемъ,

$$p^2ur(u+v) - p^2urv = p^2u \left( up'v + \frac{u^2}{2}p''v + \frac{u^3}{6}p'''v + \dots \right);$$

или

$$\begin{aligned} p^2ur(u+v) - p^2urv &= \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{20}g_2u^2 + \dots \right)^2 \\ &\left( up'v + \frac{u^2}{2}p''v + \frac{u^3}{6}p'''v + \dots \right); \end{aligned}$$

слѣдовательно

$$p^2ur(u+v) = p^2urv - \frac{1}{2}p'vp'u + \frac{1}{2}p''vri + \frac{1}{6}p'''v\zeta u + \dots \dots$$

Еще имѣемъ

$$p^2ur(u+v) - p^2vpr(u+v) = p(u+v)(ri + pv)(ri - pv),$$

или

$$\begin{aligned} p^2ur(u+v) - p^2vpr(u+v) &= (ri + pv) \left[ \frac{1}{(u+v)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{20}g_2(u+v) + \dots \right] \left[ -(u+v)p'v + \dots \right], \end{aligned}$$



а потому

$$\begin{aligned} p^2 u p(u+v) &= p^2 v p(u+v) - 2 p v p' v \zeta(u+v) + \dots = \\ &= p^2 v p(u+v) - \frac{1}{6} p''' v \zeta(u+v) + \dots, \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} p^2 u p(u+v) &= p v p^2 u + p^2 v p(u+v) - \frac{1}{2} p' v p' u + \frac{1}{2} p'' v p u + \\ &+ \frac{1}{6} p''' v \{ \zeta u - \zeta(u+v) + \zeta v \} + C. \end{aligned}$$

Полагая  $u=v$ , получимъ

$$C - \frac{1}{12} \frac{p''' v p' v}{p' v} + \frac{1}{2} p v p'' v - \frac{1}{2} p'^2 v + p^3 v = 0,$$

откуда

$$C = p v p'' v - \frac{1}{2} p v p'' v + 2 p^3 v - \frac{1}{2} g_2 p v - \frac{1}{2} g_3 - p^3 v,$$

или

$$C = 4 p^3 v - \frac{3}{4} g_2 p v - \frac{1}{3} g_3,$$

следовательно

$$\begin{aligned} 3 p^2 u p(u+v) &= 3 p v p^2 u + 3 p^2 v p(u+v) - \frac{3}{2} p' v p' u + \frac{3}{2} p'' v p u + \\ &+ \frac{1}{2} p''' v \{ \zeta u - \zeta(u+v) + \zeta v \} + 12 p^3 v - \frac{9}{4} p''' v - \frac{3}{2} g_3 \quad (9). \end{aligned}$$

в) Имѣемъ

$$\begin{aligned} p u p^2(u+v) - p^2 v p u &= p u [p(u+v) + p v] [p(u+v) - p v] = \\ &= [p(u+v) + p v] \left[ \frac{1}{u} + \frac{1}{20} g_2 u^2 + \dots \right] [u p' v + \\ &+ \frac{1}{2} u^2 p''' v + \dots]; \end{aligned}$$

следовательно

$$p u p^2(u+v) = p^2 v p u + 2 p v p' v \zeta u + \dots = p^2 v p u + \frac{1}{6} p''' v \zeta u + \dots$$



Далѣ

$$rip^3(u+v) - pvp^3(u+v) = p^3(u+v)[-(u+v)p'v + \\ + \frac{1}{2}(u+v)^2p''v - \frac{1}{6}(u+v)^3p'''v \dots],$$

или

$$rip^3(u+v) = pvp^3(u+v) + \frac{1}{2}p'vp'(u+v) + \frac{1}{2}p''vp(u+v) - \\ - \frac{1}{6}p'''v\zeta(u+v) + \dots;$$

а потому

$$rip^3(u+v) = p^3vri + pvp^3(u+v) + \frac{1}{2}p'vp'(u+v) + \frac{1}{2}p''vp(u+v) + \\ + \frac{1}{6}p'''v\{\zeta u - \zeta(u+v) + \zeta v\} + C.$$

Полагая

$$u = v,$$

получимъ

$$C = 5p^3v - \frac{1}{2}g_3pv - \frac{1}{2}(p''vp2v + p'vp'2v).$$

На этомъ основаніи

$$3p^3(u+v)ri = 3p^3vri + 3pvp^3(u+v) + \frac{3}{2}p'vp'(u+v) + \\ + \frac{3}{2}p''vp(u+v) + \frac{1}{2}p'''v\{\zeta u - \zeta(u+v) + \zeta v\} + 15p^3v - \\ - \frac{3}{2}g_3pv - \frac{3}{2}(p''vp2v + p'vp'2v) \dots \dots (10).$$

При помощи (8), (9), (10) получимъ послѣдовательно:

$$\frac{1}{16} \left( \frac{p'u - p'v}{ri - p^v} \right)^4 = p^2u + p^3(u+v) + 4pvpri + 4pvp(u+v) + 2p'v\{\zeta u - \\ - \zeta(u+v) + \zeta v\} + 5p^3v - \frac{1}{2}g_3 - \frac{1}{6}p''u + \frac{1}{6}p''(u+v) +$$



$$+ 4pvpu + 4pvp(u+v) + 2'pv \{ \zeta u - \zeta(u+v) + \\ + \zeta v \} + 5p^3v - \frac{1}{3}g_3;$$

$$\frac{1}{64} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^6 = \frac{1}{120} p^{(iv)}u + \frac{1}{120} p^{(iv)}(u+v) + pvp''(u+v) + \\ + 21p^3vp u + 21p^3vp(u+v) - \frac{9}{10} g_3 p u - \\ - \frac{9}{10} g_3 p(u+v) - \frac{3}{2} p'vp'u + \frac{3}{2} p'vp'(u+v) + \\ + \frac{3}{2} p''v \{ \zeta u - \zeta(u+v) + \zeta v \} + 40p^3v - \frac{17}{4} g_3 p v + \\ + 2g_3 - \frac{3}{2} (p''vp2v + p'vp'2v).$$

Поэтому

$$(A) \frac{1}{16} \int \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^4 du = \frac{1}{6} p'u + \frac{1}{6} p'(u+v) - 4pv \{ \zeta u + \zeta(u+v) \} \\ + 2p'v \log e^{u\zeta v} \frac{\sigma u}{\sigma(u+v)} + \left( 5p^3v - \frac{1}{3}g_3 \right) u + C;$$

$$(B) \frac{1}{64} \int \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^6 du = \frac{1}{120} p'''u + \frac{1}{120} p'''(u+v) + p v \{ p'u + \\ + p'(u+v) \} - \frac{3}{2} p'v \{ pu - p(u+v) \} + \\ + \left( \frac{9}{10} g_3 - 21p^3v \right) \{ \zeta u + \zeta(u+v) \} + \\ + \frac{3}{2} p''v \log e^{u\zeta v} \frac{\sigma u}{\sigma(u+v)} + \left\{ 40p^3v - \frac{17}{4} g_3 p v + \right. \\ \left. + 2g_3 - \frac{3}{2} (p''vp2v + p'vp'2v) \right\} u + C.$$



§ 5.

Для того, чтобы показать, какъ примѣняется метода къ нахожденію интегрируемой формы для

$$\left[ \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right]^{2k+1}$$

разсмотримъ простѣйшій случай, когда  $k=1$ , т. е. найдемъ

$$\int \left[ \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right]^3 du,$$

Перемножая два уравненія

$$\begin{aligned} p'v \frac{p'u - p'v}{pu - pv} + 2p^2v - p''v &= -2rip(u+v) + 2pvpri + 2pvp(u+v), \\ -pv + \frac{1}{4} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 &= pu + p(u+v), \end{aligned}$$

НАХОДИМЪ

$$\begin{aligned} \frac{p'v}{4} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^3 + \frac{2p^2v - p''v}{4} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 - pvp'v \frac{p'u - p'v}{pu - pv} - 2p^2v + pvp''v &= \\ = -2p^2up(u+v) - 2rip^2(u+v) + \\ + 2pvp^2u + 4pvprip(u+v) + 2pvp^2(u+v) \quad . \quad (11). \end{aligned}$$

Внося въ (11) результаты, выраженные уравн. (8), (9) и (10), будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \frac{p'v}{4} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^3 - (4p^2v - \frac{1}{2}g_2)(pu + p(u+v) + pv) + 2pvp'v \{ \zeta u - \\ - \zeta(u+v) + \zeta v \} + 4p^2v - \frac{1}{2}g_2pv = 2pvp^2u + \\ + 2pvp^2(u+v) + 4p^2vpri + 4p^2vp((u+v) + \frac{1}{3}p''v \{ \zeta u - \\ - \zeta(u+v) + \zeta v \} + 8p^2v - g_2pv - 2p^2vpri - \\ - 2pvp^2(u+v) - p'vp'(u+v) - p''pv(u+v) - \\ - \frac{1}{3}p''v \{ \zeta u - \zeta(u+v) + \zeta v \} - 10p^2v + g_2pv + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + p''v p 2v + p'v p' 2v - 2p v p^3 u - 2p^3 v p(u + v) + \\
 & + p'v p' u - p''v p u - \frac{1}{3} p''' v \{ \zeta u - \zeta(u + v) + \zeta v \} - \\
 & - 8p^3 v + \frac{3}{2} p''v + g_3.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - p^v} \right)^3 du = \frac{1}{2} \{ p'u - p'(u + v) \} - 3p v \{ \zeta u - \zeta(u + v) + \\
 + \zeta v \} + \frac{1}{2p'v} \{ p''v 2v + p'v p' 2v + \frac{3}{2} p''v + g_3 - 10p^3 v \},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (C) \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - p^v} \right)^3 du = \frac{1}{2} \{ pu - p(u + v) \} - 3p v \operatorname{Log} \frac{\sigma u}{\sigma(u + v)} + \\
 + \frac{1}{2p'v} \{ p''v p 2v + p'v p' 2v + \frac{3}{2} p''v + g_3 - \\
 - 10p^3 v - 3p v \zeta v \} u + C.
 \end{aligned}$$

## § 6.

Найденныя разложенія можно представить въ формѣ:

$$\begin{aligned}
 \text{I)} \quad \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - p^v} \right)^4 &= \frac{1}{6} p''u + \frac{1}{6} p''(u + v) + 4p v \{ pu + p(u + v) + \\
 &+ p v \} + 2p'v \{ \zeta u - \zeta(u + v) + \zeta v \} + p^3 v - \frac{1}{3} g_3 = \\
 &= \frac{1}{6} [p''u + p''(u + v)] + 4p v \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - p^v} \right)^3 - \\
 &- 2p'v \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - p^v} \right) + p^3 v - \frac{1}{3} g_3;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II)} \quad \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - p^v} \right)^6 &= \frac{1}{120} p^{(iv)} u + \frac{1}{120} p^{(iv)}(u + v) + p v p''(u + v) + \\
 &+ \left( 21p^3 v - \frac{9}{10} g_3 \right) \{ pu + p(u + v) + p v \} + \\
 &+ \frac{3}{2} p''' v \{ \zeta u - \zeta(u + v) + \zeta v \} + 19p^3 v -
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -2g_3 p^v + 2g_3 - \frac{3}{2}(p''v p^2 v + p'v p'^2 v) = \\
 & = \frac{1}{120} p^{(iv)} u + \frac{1}{120} p^{(iv)} (u + v) + p v p'' u + \\
 & + p v p'' (u + v) + (21 p^3 v - \frac{9}{10} g_3) \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p' u - p' v}{p u - p v} \right)^2 + \\
 & + \frac{3}{2} p''' v \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p' u - p' v}{p u - p v} \right) + 19 p^3 v - 2 g_3 p v + 2 g_3 - \\
 & - \frac{3}{2} (p'' v p^2 v + p' v p'^2 v);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III)} \quad \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p' u - p' v}{p u - p v} \right)^3 &= \frac{1}{2} \{ p' u - p' (u + v) \} + 3 p v \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p' u - p' v}{p u - p v} \right) + \\
 & + \frac{1}{2 p' v} \{ p'' v p^2 v + p' v p'^2 v + \frac{3}{2} p''' v + g_3 - 10 p^3 v \}.
 \end{aligned}$$

Изъ этихъ формулъ видно, что интегралы

$$\int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p' u - p' v}{p u - p v} \right)^3 du, \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p' u - p' v}{p u - p v} \right)^4 du, \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p' u - p' v}{p u - p v} \right)^6 du,$$

кроме алгебраической части, могутъ содержать только три трансцендентныхъ функціи:

$$\int du, \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p' u - p' v}{p u - p v} \right), \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p' u - p' v}{p u - p v} \right)^2 du.$$

Можно, съ чрезвычайною простотою, доказать, что этимъ свойствомъ обладаетъ всякій интегралъ вида

$$\int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p' u - p' v}{p u - p v} \right)^l du,$$

гдѣ  $l$  цѣлое, положительное число. Въ самомъ дѣлѣ интегрируемая форма для

$$\left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p' u - p' v}{p u - p v} \right)^l$$



будетъ, очевидно,

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^l = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2} A_{\alpha} p^{(\alpha)}(u) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2} A'_{\alpha} p^{(\alpha)}(u+v) + \\ + Bpu + B'p(u+v) + C\zeta u + C'\zeta(u+v) + D,$$

гдѣ  $A, B, \dots D$  нѣкоторые постоянные коэффициенты.

Замѣняя здѣсь  $u$  на  $(-u-v)$ , получимъ

$$\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{p'(u+v) + p'v}{p(u+v) - pv}\right]^l = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2} (-1)^{\alpha} A'_{\alpha} p^{(\alpha)}(u) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2} (-1)^{\alpha} A_{\alpha} p^{(\alpha)}(u+v) + \\ + Bp(u+v) + B'pu - C\zeta(u+v) - C'\zeta u + D.$$

Дѣлая подобную же замѣну въ уравненіи

$$\zeta(+v) - \zeta u - \zeta v = \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

получимъ

$$-\zeta u + \zeta(u+v) - \zeta v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p'(u+v) + p'v}{p(u+v) - pv},$$

слѣдовательно

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p'(u+v) + p'v}{p(u+v) - pv},$$

а потому

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^l = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2} \frac{A_{\alpha} + (-1)^{\alpha} A'_{\alpha}}{2} p^{(\alpha)} u + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2} \frac{A'_{\alpha} + (-1)^{\alpha} A_{\alpha}}{2} p^{(\alpha)}(u+v) + \\ + \frac{B+B'}{2} \{pu + p(u+v) + pv\} + \frac{C-C'}{2} \{\zeta u - \zeta(u+v) + \zeta v\} + E = \\ = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2} \frac{A_{\alpha} + (-1)^{\alpha} A'_{\alpha}}{2} p^{(\alpha)} u + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=l-2} \frac{A'_{\alpha} + (-1)^{\alpha} A_{\alpha}}{2} p^{(\alpha)}(u+v) + \\ + \frac{B+B'}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 + \frac{C-C'}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right) + E.$$



Отсюда слѣдуетъ, что

$$\int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)' du,$$

сверхъ алгебраической части будетъ содержать три неприводимыхъ интеграла

$$\int du, \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right) du, \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 du.$$

Этотъ результатъ указанъ Абелемъ и достигнутъ имъ чисто алгебраическимъ путемъ.

### § 7.

Сложность результатовъ, получаемыхъ для интеграловъ

$$\int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^{2k+1} du,$$

вынуждаетъ насъ изложить методу приведенія этихъ интеграловъ къ виду

$$\int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^{2k} du.$$

Сущность метода вполне выяснится изъ разсмотрѣнія частнаго примѣра. Возьмемъ интегралъ

$$\int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^5 du = \int \frac{\xi^5 d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4}}$$

Легко догадаться, на основаніи § 6, что приведеніе этого интеграла можетъ быть достигнуто при помощи равенства

$$\begin{aligned} \int \frac{\xi^5 d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4}} &= k\xi^2 \sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4} + \\ &+ \int \frac{(A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D)d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4}} \dots (12), \end{aligned}$$



гдѣ  $k, A, B, C, D$  неопредѣленные коэффициенты.

Дифференцируя (12), находимъ

$$\frac{\xi^5}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}} = \frac{4k\xi^5 + 18k\alpha_2\xi^3 + 10k\alpha_3\xi^2 + 2k\alpha_4\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}} + \frac{A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}},$$

или

$$\xi^5 = 4k\xi^5 + (18k\alpha_2 + A)\xi^3 + (10k\alpha_3 + B)\xi^2 + (2k\alpha_4 + C)\xi + D,$$

откуда

$$k = \frac{1}{4}, A = -\frac{9}{2}\alpha_2, B = -\frac{5}{2}\alpha_3, C = -\frac{\alpha_4}{2}, D = 0;$$

слѣдовательно

$$\int \frac{\xi^5 d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}} = \frac{1}{4}\xi^2\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4} - \frac{1}{2}\int \frac{(9\alpha_2\xi^3 + 5\alpha_3\xi^2 + \alpha_4\xi)\partial\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}} \dots (13).$$

Положимъ

$$\int \frac{\xi^3 d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}} = i\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4} + \int \frac{(A'\xi + B')\partial\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}}.$$

Дифференцируя это уравненіе, имѣемъ

$$\frac{\xi^3}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}} = \frac{2i(\xi^3 + 3\alpha_2\xi + \alpha_3) + A'\xi + B'}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}};$$

$$\xi^3 = 2i\xi^3 + (6i\alpha_2 + A')\xi + (2i\alpha_3 + B');$$

отсюда

$$i = \frac{1}{2}, A' = -3\alpha_2, B' = -\alpha_3;$$



а потому

$$\int \frac{\xi^3 u \xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4}} = \frac{1}{2} \sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4} - \int \frac{(3\alpha_2 \xi + \alpha_3) d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4}} \dots (14),$$

или

$$\int \left( \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - p^v} \right)^2 du = \frac{1}{2} [pu - p(u + v)] + 3pv \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - p^v} \right) du - p'v. \text{ и } \dots \dots \dots (15)$$

Далѣе умножая (14) на  $\frac{9}{2}\alpha_2$ , получимъ

$$\int \frac{\frac{9}{2}\alpha_2 \xi^3 d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4}} = \frac{9}{4}\alpha_2 \sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4} - \int \frac{\left( \frac{27}{2}\alpha_2^2 \xi + \frac{9}{2}\alpha_2 \alpha_3 \right) d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4}};$$

слѣдовательно

$$\int \frac{\xi^3 d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4}} = \left( \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{9}{4}\alpha_2 \right) \sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4} - \frac{5}{2}\alpha_2 \int \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4}} + \int \frac{\left( \frac{27}{2}\alpha_2^2 - \frac{\alpha_4}{2} \right) \xi d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4}} + \frac{9}{2}\alpha_2 \alpha_3 \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4}} \dots (16).$$

Нетрудно (16) выразить въ эллиптическихъ функціяхъ, замѣчая, что

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - p^v}, \quad \alpha_2 = -pv, \quad \alpha_3 = p'v, \quad \alpha_4 = g_2 - 3p^2v, \\ \sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4} = pu - p(u + v) \quad (').$$

---

(') Journal de Mathem. pures et ap. 4-e série T. VI. p 293—311. 1890.



Для надлежащей подстановки, получимъ:

$$\int \left[ \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right]^2 du = \frac{1}{24} [p''u - p''(u + v)] + \frac{5}{2} p'v [pu - p(u + v)] - \\ - \frac{5}{2} p'v \int \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right]^2 du + \left( \frac{33}{2} p'^2 v - g_2 \right) \int \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right] du - \\ - \frac{9}{2} p'v p'.v. \text{ и } \dots \dots \dots (17).$$

### § 8.

Для проверки найденныхъ результатовъ рѣшимъ вопросъ, постановленный Абелемъ: <sup>(1)</sup> изыскать условія, необходимыя и достаточныя, для того, чтобы интегралъ

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}$$

выражался алгебраическою функциею.

Имѣемъ

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}} = \int \frac{(\xi - a_1)^4 dx}{\sqrt{\xi^4 + 6a_2 \xi^2 + 4a_3 \xi + a_4}} = \\ = \int \frac{\xi^4 d\xi}{\sqrt{R_1}} - 4a_1 \int \frac{\xi^3 d\xi}{\sqrt{R_1}} + 6a_1^2 \int \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{R_1}} - 4a_1^3 \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{R_1}} + a_1^4 \int \frac{d\xi}{\sqrt{R_1}},$$

гдѣ

$$R_1 = \xi^4 + 6a_2 \xi^2 + 4a_3 \xi + a_4$$

Пользуясь формулой I) § 6 и формулой (15) § 7, получимъ

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}} = \frac{1}{6} \{ p'u + p'(u + v) \} - \\ - 2a_1 \{ pu - p(u + v) \} + (6a_1^2 - 4a_2) \int \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu + pv} \right]^2 du +$$

<sup>(1)</sup> Oeuvres complètes t. 2 p. 95, 96, 1881.



$$+ (12a_1\alpha_2 - 2\alpha_3 - 4a_1^3) \int \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right]^2 du + (a_1^4 + 4a_1\alpha_2 + \alpha_2^2 - \frac{1}{3}g_2)u$$

Искомые условія будутъ:

$$1) \quad 6a_1^2 - 4\alpha_2 = 6a_1^2 - 4a_2 + 4a_1^2 = 10a_1^2 - 4a_2 = 0,$$

$$\alpha_2 = \frac{5}{2}a_1^2;$$

откуда

$$2) \quad 12a_1\alpha_2 - 2\alpha_3 - 4a_1^3 = 18a_1\alpha_2 - 2a_3 - 20a_1^3 = 25a_1^3 - 2a_3 = 0;$$

$$\alpha_3 = \frac{25}{2}a_1^3;$$

$$3) \quad a_1^4 + 4a_1\alpha_2 + \alpha_2^2 - \frac{1}{3}g_2 \quad (') = a_1^4 + 4a_1\alpha_2 - 12a_1^2\alpha_2 + 8a_1^4 +$$

$$+ \alpha_2^2 - 2a_1^2\alpha_2 + a_1^4 - \frac{1}{3}a_1^4 + \frac{4}{3}a_1\alpha_2 - \alpha_2^2 = 0,$$

$$a_1 = 125a_1^4$$

слѣдовательно

$$x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = x^4 + 4a_1x^3 + 15a_1^2x^2 + \\ + 50a_1^3x + 125a_1^4.$$

Имѣемъ поэтому

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^4 + 4a_1x^3 + 15a_1^2x^2 + 50a_1^3x + 125a_1^4}} = \frac{1}{6} \{ p'u + p'(u + v) \} - \\ - 2a_1 \{ pu - p(u+v) \} \quad (18).$$

---

(<sup>2</sup>) Выраженіе  $g_2$  въ функціи коэффициентовъ полинома  $R$  можно найти въ соч. Halphen'a: Traité des fonct. ellipt. t. I. p. 120, 1886.



Но

$$\begin{aligned} pu - p(u + v) &= \sqrt{x^4 + 4a_1x^3 + 6a_1^2x^2 + 4a_1^3x + a_1^4} = \\ &= \sqrt{x^4 + 4a_1x^3 + 15a_1^2x^2 + 50a_1^3x + 125a_1^4}; \\ pu + p(u + v) + pv &= \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 = \xi^2, \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} p'u + p'(u + v) &= 2\xi \frac{d\xi}{du} = 2\xi \sqrt{\xi^4 + 6a_1\xi^3 + 4a_1^2\xi^2 + a_1^3} = \\ &= 2(x + a_1) \sqrt{x^4 + 4a_1x^3 + 15a_1^2x^2 + 50a_1^3x + 125a_1^4}; \end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^4 + 4a_1x^3 + 15a_1^2x^2 + 50a_1^3x + 125a_1^4}} &= \\ = \frac{1}{3}(x - 5a_1) \sqrt{x^4 + 4a_1x^3 + 15a_1^2x^2 + 50a_1^3x + 125a_1^4}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы получить тотъ самый интегралъ, который приводится у Абеля, положимъ  $a_1 = \frac{1}{5}$ ; тогда

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^4 + \frac{4}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}} = \frac{1}{3}(x - 1) \sqrt{x^4 + \frac{4}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}},$$

или

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}} = \frac{1}{15}(x - 1) \sqrt{5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}.$$

Этотъ же примѣръ приводится въ сочиненіи Сомова „Основанія теоріи эллип. функцій“, 1850, ст. 9. Легко составить безчисленное множество подобныхъ примѣровъ. Поставленная въ этомъ  $n^\circ$  задача могла бы быть рѣшена еще слѣдующимъ путемъ. Если предложенный интегралъ выражается алгебраически, то мы должны имѣть

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^4 + 4a_1x^3 + 6a_1^2x^2 + 4a_1^3x + a_1^4}} &= \frac{1}{6} \{ p'u + p'(u + v) \} - \\ &- 2a_1 \{ pu - p(u + v) \}, \end{aligned}$$



или

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}} =$$

$$= \frac{1}{3}(x - 5a_1)\sqrt{x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}.$$

Дифференцируя это уравнение, находимъ

$$\frac{x^4}{\sqrt{x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}} = \frac{1}{3}\sqrt{x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4} +$$

$$+ \frac{2}{3} \cdot \frac{(x - 5a_1)(x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3)}{\sqrt{x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}};$$

откуда

$$1) \quad 4a_2 - 10a_1^2 = 0, \quad a_2 = \frac{5}{2}a_1^2;$$

$$2) \quad 2a_3 - 10a_1 a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{25}{2}a_1^3;$$

$$3) \quad a_4 - 10a_1 a_3 = 0, \quad a_4 = 125a_1^4.$$

Мы получаемъ вышенайденные результаты.

§ 9. Докажемъ теперь, что при обращеніи интеграла

$$\int \frac{fx dx}{\varphi(x)\sqrt{R}} \dots \dots \dots (19),$$

никакихъ новыхъ эллиптическихъ функцій мы не получимъ.

Интеграль (19) есть совокупность интеграловъ вида

$$\int \frac{dx}{[x-a]^l \sqrt{R}} = \int \frac{du}{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} - b\right)^l},$$

гдѣ положено, для краткости

$$\frac{a_1}{a_0} + a = b.$$

Займемся преобразованиемъ двояко-периодической функціи

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'v}{pu - pv} - b} = 2 \cdot \frac{pu - pv}{p'u - p'v - 2b(pu - pv)} \quad (20).$$



Безконечности этой функции найдутся изъ уравненія  
 $p'u - p'v - 2b(pu - pv) = 0$ , или  $p'u - p'v = 2b(pu - pv)$ , или

$$4z^3 - g_1 z - g_2 = (2bz + 2b\alpha_2 + \alpha_3)^2$$

Это кубическое уравненіе дастъ три корня

$$z_1 = pv = -\alpha_2, \quad z_2 = pt, \quad z_3 = pw$$

такого рода, что

$$v + t + w = 0,$$

по теоремѣ Абеля (<sup>1</sup>).

Такъ какъ при  $u = v$  имѣемъ

$$\mathfrak{A} = \frac{2p'v}{p''v - 2bp'v}$$

то  $\mathfrak{A}$  имѣетъ лишь двѣ безконечности  $t$  и  $w$ , удовлетворяющія уравненію

$$t + w = -v,$$

откуда

$$t = -(v + w).$$

Тѣ-же безконечности имѣетъ функція

$$\mathfrak{B} = \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)};$$

а потому можно взять

$$2 \frac{pu - p''}{p'u - p'v - 2b(pu - pv)} = \lambda \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} + \mu$$

гдѣ  $\lambda$  и  $\mu$  постоянные коэффициенты. Дѣлая  $u = w$  и уравнивая главные члены обѣихъ частей, получимъ

$$\frac{2(pw - p'')}{(u-w)p''w} = \frac{-2\lambda}{u-w},$$

---

(<sup>1</sup>) Halphen «Traité des fonctions elliptiques etc». t. 1. 1886 p. 52.



откуда

$$\lambda = \frac{p'' - pw}{p'w},$$

слѣдовательно

$$\mu = \frac{p'' - pw}{p'w} \cdot \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} + \mu.$$

Полагая

$$u = v,$$

находимъ

$$\mu = \frac{2p''v}{p''v - 2p'v} - \frac{p'' - pw}{p'w} \cdot \frac{p'(v-w) - p'(v+2w)}{p(v-w) - p(v+2w)}.$$

И такъ  $\lambda$  и  $\mu$  найдены и могутъ быть вычислены алгебраически.

Поэтому

$$\int \frac{dx}{(x-a)^l \sqrt{R}} = \int \left\{ \lambda \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} + \mu \right\}^l du.$$

Этотъ послѣдній интегралъ приводится къ тремъ слѣдующимъ

$$\int \left\{ \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} \right\}^2 du, \quad \int \left\{ \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} \right\} du, \quad \int du,$$

между которыми нѣтъ ни одного новаго. По формуламъ сложения эллиптическихъ аргументовъ имѣемъ.

$$\frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} = 2\zeta(u+v+w) - 2\zeta(u-w) - 2\zeta(v+2w),$$

$$\left[ \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} \right]^2 = 4p(u+v+w) + 4p(u-w) + 4p(v+2w),$$

слѣдовательно

$$1) \int \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} du = 2 \operatorname{Loge}^{-u\zeta(v+2w)} \frac{\sigma(u+v+w)}{\sigma(u-w)}$$

$$2) \int \left[ \frac{p'(u-w) - p'(v+2w)}{p(u-w) - p(v+2w)} \right]^2 du = -4 \left\{ \zeta(u+v+w) + \zeta(u-w) \right\} +$$

$$+ 4p(v+2w) \cdot u$$



# Изслѣдованіе интеграла

$$\int \frac{F(x)dx}{F_1(x)\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}} \dots \dots (21)$$

приводить насъ въ заключенію, что, сверхъ алгебраической части, интеграль этотъ будетъ содержать трансцендентные члены

$$\sum_{i=0}^{i=i} l_i \left\{ \zeta(u+v+w_i) + \zeta(u-w_i) \right\} + \sum_{i=0}^{i=i} K_i \operatorname{Log} \frac{\sigma(u+v+w_i)}{\sigma(u-w_i)} +$$

ти, гдѣ  $w_0 = 0$ . Если интеграль (21) принадлежитъ въ категориі псевдо-эллиптическихъ, то

$$1) \sum l_i \left\{ \zeta(u+v+w_i) + \zeta(u-w_i) \right\} = 0,$$

$$2) v = \frac{2\tilde{\omega}}{n}.$$

И. Долбня.







BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE  
de Kasan . *Université*

Deuxième série. Tome I. № 2.

Q  
60  
.K21  
A2

ИЗВѢСТІЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ I

№ 2

КАЗАНЬ

Типографія Императорскаго Университета

1891



BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE  
de Kasan

Deuxième série. Tome I. № 4.

Q  
60  
K21  
A2

ИЗВѢСТІЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ I

№ 4

КАЗАНЬ

Типографія Императорскаго Университета

1891



# СОДЕРЖАНІЕ.

## I.

**Д. Гольдгаммеръ.** Электромагнитная теорія свѣта.

## II.

**Лѣтопись Физико-математическаго Общества.**

Протоколы 13—14 засѣданій Физико-математическаго Общества.

**І. М. Первушинъ.** Задача изъ теоріи чиселъ. Формула простыхъ чиселъ.

Списокъ книгъ и періодическихъ изданій по физико-математическимъ наукамъ.

Объявленія.

## Table des matières.

**D. Goldhammer.** Théorie électromagnétique de la lumière.

Procès-verbaux des séances 13—14 de la Société Physico-mathématique.

**I. Pervouchine.** Un problème de la théorie des nombres. Formule des nombres premiers.

Liste des livres et de journaux reçus par la bibliothèque de la Société.

Annonces.

---



# СПИСОКЪ ЧЛЕНОВЪ

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ

въ октябрь 1890 г.

- 1) *Адамантовъ*, Дмитрій Леонтьевичъ, учитель 3-й гимназіи въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 2) *Адріановъ*, Василій Васильевичъ, учитель кадетскаго корпуса въ Ниж-Новгородѣ (съ 1 мая 1888 г.).
- 3) *Александровъ*, Александръ Ивановичъ, учитель гимназіи въ Саратовѣ (съ 11 октября 1880 г.).
- 4) *Альбрехтъ*, Давыдъ Ивановичъ, инспекторъ студентовъ Казанскаго универс. (съ 10 сент. 1888 г.).
- 5) *Андреевъ*, Михайлъ Кириловичъ, учитель реального учил. въ Самарѣ (съ 24 сентября 1883 г.).
- 6) *Ардашевъ*, Александръ Александровичъ, кандидатъ физико-мат. наукъ въ Екатеринбургѣ (съ 25 октября 1886 г.).
- 7) *Аристовъ*, Иванъ Николаевичъ, непремѣнный членъ губернскаго по крестьянскимъ дѣламъ присутствія въ Казани (съ 17 января 1887 г.).
- 8) *Багаевъ*, Александръ Антоновичъ, военный инженеръ въ Свеаборгѣ (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 9) *Блажеевскій*, Ромуальдъ Осиповичъ, приватъ-доцентъ Казанск. универ. (съ 10 сентября 1888 г.).
- 10) *Бобровниковъ*, Николай Алексѣевичъ, учитель ино-родческой учит. семин. въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 11) *Бобынинъ*, Викторъ Викторовичъ, приватъ-доцентъ университета въ Москвѣ (съ 28 сентября 1885 г.).
- 12) *Богородицкій*, Василій Алексѣевичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 14 мая 1883 г.).
- 13) *Большагаринскій*, Владимиръ Константиновичъ, учитель реального училища въ Выборгѣ (съ 29 сент. 1884 г.).



14) *Бравинъ*, Николай Александровичъ, учитель гимназіи въ Уфѣ (съ 24 сентября 1883 г.).

15) *Брюсовъ*, Евграфъ Ивановичъ, лаборантъ физической лабораторіи Московскаго университета (съ 24 февр. 1890 г.).

16) *Васильевъ*, Александръ Васильевичъ, профес. университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).

17) *Вальтеръ*, Адамъ Яковлевичъ, учитель гимназіи въ Астрахани (съ 30 сент. 1886 г.).

18) *Веретенниковъ*, Владиміръ Ивановичъ, учитель реального училища въ Казани (съ 6 февр. 1888 г.).

19) *Вильковискій*, Эммануилъ Яковлевичъ, учитель Симбирской женской гимназіи (съ 24 сент. 1883 г.).

20) *Виноградскій*, Владиміръ Николаевичъ, директоръ реал. училища въ Астрахани (съ 24 сентября 1883 г.).

21) *Витковскій*, Василій Васильевичъ, полковникъ генеральнаго Штаба въ С.-Петербургѣ (съ 29 октября 1883 г.).

22) *Вишневскій*, Гурій Матвѣевичъ, инспекторъ народныхъ училищъ въ Козьмодемьянскѣ (съ 29 сент. 1885 г.).

23) *Волковъ*, Михаилъ Сергѣевичъ, учитель 2-го реального училища въ С.-Петербургѣ (съ 28 сент. 1885 г.).

24) *Галузевскій*, Иванъ Ивановичъ, кандидатъ математики въ Полтавѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

25) *Гезехусъ*, Николай Александровичъ, профессоръ Технологич. Инстит. въ С.-Петерб. (съ 10 сент. 1888 г.).

26) *Генкель*, Августъ Августовичъ, директоръ реального училища въ Сарапулѣ (съ 4 апрѣля 1880 г.).

27) *Голубевъ*, Петръ Александровичъ, кандидатъ математики въ Вяткѣ (съ 17 мая 1880 г.).

28) *Гольдгаммеръ*, Дмитрій Александровичъ, приватъ-доцентъ Казанск. универ. (съ 10 сентября 1888 г.).

29) *Горталовъ*, Александръ Петровичъ, кандидатъ математ. наукъ въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).

30) *Де-Метцъ*, Георгій Георгіевичъ, приватъ доцентъ Новороссійскаго университета (съ 24 февраля 1890 г.).

31) *Дмитріевскій*, Михаилъ Михайловичъ, директоръ реальн. училища въ Перми (съ 15 апрѣля 1880 г.).

32) *Долбня*, Иванъ Петровичъ, учитель кадетскаго корпуса въ Ниж.-Новгородѣ (съ 1 мая 1888 г.).

33) *Домовъ*, Алексѣй Ѳедоровичъ, кандидатъ математ. наукъ (съ 13 апрѣля 1885 г.).

34) *Дубяго*, Дмитрій Ивановичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 29 окт. 1883 г.).

35) *Егоровъ*, Ѳедоръ Ивановичъ, преподаватель учительскаго института въ Москвѣ (съ 12 ноября 1888 г.).



**Списокъ книгъ по Физико-математическимъ наукамъ, поступившихъ въ библіотеку Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ за время отъ іюня 1890 по апрѣль 1891.**

**І. М а т е м а т и к а.**

**1) Арифметика.**

**Жбиковскій. Основанія общей арифметики. Спб. 90.**

**2) Теорія чиселъ.**

**\* Порѣцкій Двѣ замѣтки.**

**\* Порѣцкій. Къ ученію о простыхъ числахъ. Каз. 88.**

**\* Преображенскій П. Принципъ узловыхъ точекъ Каз. 88.**

**3) Алгебра.**

**\* Ващенко-Захарченко. Алгебраическій анализъ. Кіевъ 88.**

**\* Максимовичъ. Интегрированіе неявныхъ функцій и вычисленіе корней. Каз. 83. 3 экз.**

**\* Максимовичъ. О доказательствѣ существованія корня всякаго алгебраическаго уравненія. Каз. 83. 10 экз.**

**\* Максимовичъ. Разсужденіе о разложеніи въ рядъ функцій отъ корней уравненій и о нѣкоторыхъ формулахъ приближенія. Каз. 82 (20 экз.).**

**\* Марковъ. Доказательство сходимости многихъ непрерывныхъ дробей.**

**\* Марковъ. Доказательство трансцендентности чиселъ  $e$  и  $\pi$ . Спб. 83.**

**\* Марковъ. О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей. Спб. 84.**



\* Слешинскій. О сходимости непрерывныхъ дробей. Одесса 1888.

\* Тихомаврицкій. Разложеніе тригонометрическихъ и эллиптическихъ функцій на частныя дроби и въ безконечныя произведенія. Харьковъ. 1890.

\* Markoff. Mémoire sur la transformation des séries peu convergentes en séries très convergentes. Спб. 90.

\* Petersen. Theorie der algebraischen Gleichungen. Коп. 1878.

\* Markoff. Sur les racines de certaines équations.

\* Possé. Sur quelques applications des fractions continues algébriques. Спб. 86.

4) *Введеніе въ анализъ и исчисленіе безконечно-малыхъ,*

\* Todhunter. An elementary treatise on the theory of equations. Lond. 67.

\* Букрѣевъ. О разложеніи трансцендентныхъ функцій на частныя дроби. Кіевъ. 1887.

Имшенецкій. Замѣтка о геометрическомъ значеніи формулы Эйлера для приближеннаго вычисленія квадратуръ. Спб. 90.

\* Пташицкій. Объ алгебраическомъ интегрированіи алгебраическихъ дифференціаловъ.

\* Пташицкій. Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ эллиптическихъ дифференціаловъ Спб. 88.

\* Слешинскій. Доказательство существованія нѣкоторыхъ предѣловъ.

\* Старковъ. Интегрированіе рациональной дроби съ мнимыми корнями въ знаменателѣ. Од. 85.

\* Hermite. Cours d'Analyse. Prem. part. 1873.

\* Méray. Nouveau précis d'analyse infinitésimale. Paris. 72.

*Дифференціальныя уравненія.*

\* Громека. О безконечныхъ значеніяхъ интеграловъ линейныхъ дифф. уравненій втораго порядка. Каз. 87.

\* Ермаковъ. Дифф. уравненія 1-го порядка съ 2 переменными. Кіевъ. 87.

\* Ермаковъ. Нелинейныя дифф. уравненія съ частными производными. I-го пор. со многими переменн. Кіевъ. 84.



# ОГЛАВЛЕНІЕ.

## I.

Стр.

|                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| А. Васильевъ. Изъ исторіи и философій понятія о цѣломъ положительномъ числѣ. . . . .                           | 1.  |
| Г. Шебуевъ. Къ вопросу о распространеніи теплоты въ текущей жидкости путемъ теплопроводности и конвекціи . .   | 22. |
| И. Долбня. Объ интегрированіи посредствомъ эллиптическихъ функцій . . . . .                                    | 46. |
| Я. Корнухъ-Троцкій. Наблюденіе съ Казанской обсерваторіи метеорнаго потока «персеидъ» 10 августа 1890 года . . | 74. |

## II.

|                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Лѣтопись Физико-математическаго Общества. . . . .                                                          | 1.  |
| Уставъ Физико-математическаго Общества. . . . .                                                            | —   |
| Списокъ членовъ Физико-математическаго Общества . .                                                        | 5.  |
| Протоколы 1—5 засѣданій Физико-математическаго Общества. . . . .                                           | 14. |
| Списокъ книгъ поступившихъ въ бібліотеку Физико-математическаго Общества . . . . .                         | 25. |
| Ө. Суворовъ. Библиографическій отзывъ о «Сборникѣ упражненій въ умственномъ счетѣ» Н. Бобровникова . . . . | 33. |
| Объявленія . . . . .                                                                                       | —   |

---



**Списокъ книгъ и періодическихъ изданій по Физико-математическимъ наукамъ, поступившихъ въ бібліотеку Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ за время отъ апрѣля 1891 года по декабрь 1891 года.**

### **I. Математика.**

#### **1) Арифметика.**

**А. Павловъ.** О начальномъ обученіи дѣтей счисленію въ школѣ и дома. Екатеринбург. 1890. 3 экз.

#### **2) Теорія чиселъ.**

**П. В. Преображенскій.** Теорія бинарныхъ квадратичныхъ формъ. М. 1890.

**П. В. Преображенскій.** Принципъ узловыхъ точекъ. Каз. 88.

#### **3) Алгебра.**

**П. В. Преображенскій.** Замѣчанія по поводу статьи Лахтина: «Нѣкоторые упрощенія въ рѣшеніи неопред. уравненій 2-й степ. съ 2 неизвѣстными».

#### **4) Определенные интегралы и нѣкоторые особые виды функций.**

**Покровскій.** О преобразованіяхъ ультра-эллиптическихъ интеграловъ и функций 1-го класса. М. 1891.

**Покровскій.** Историческій очеркъ теоріи ультра-эллиптическихъ и абелевыхъ функций. М. 1886.

**Покровскій.** Теорія ультра-эллиптическихъ функций 1-го класса. М. 1888.

**Покровскій.** Соотношеніе между модулями и ихъ дополненіями для преобразованія 5-й степени эллиптическихъ функций.



**Покровскій.** Теорія эллиптических функций. М. 1886.

**П. В. Преображенскій.** Упрощенное изложеніе теоріи Эйлеровыхъ интеграловъ. М. 1890. 5 экз.

5) *Тригонометрія.*

**П. В. Преображенскій.** Руководство прямолинейной тригонометрии. М. 1890.

**П. В. Преображенскій.** Сборникъ тригонометрическихъ задачъ. М. 1888.

**II. Механика.**

**Н. Е. Жуковскій.** Определеіе силовой функции по данному семейству траекторій. М. 1890.

**Н. Е. Жуковскій.** Къ вопросу о наибольшемъ ударѣ.

**Н. Е. Жуковскій.** Лекціи по гидродинамикѣ. Вып. I. М. 89.

**Н. Е. Жуковскій.** О вліяніи давленія на насыщенные водою пески. М. 1890.

**Н. Е. Жуковскій.** О формѣ судовъ. М. 1890.

**Н. Е. Жуковскій.** О гидродинамической теоріи тренія хорошо смазанныхъ твердыхъ тѣлъ.

**Н. Е. Жуковскій.** Объ артиллерійскихъ снарядахъ Шапелл. М. 1890.

**III. Физика и метеорологія.**

**Гезехусъ.** О преломленіи и скорости звука въ разныхъ звукопропускающихъ тѣлахъ.

**Гезехусъ.** О значеніи метеорологическихъ наблюденій по отношенію къ Сибири. Томскъ. 1889.

**В. В. Преображенскій.** Геометрическая теорія преломленія свѣта. М. 1884. 25 экз.

**Слугиновъ.** Научный отдѣлъ на французской выставкѣ въ Москвѣ. Каз. 1891.

**Слугиновъ.** Наблюденія земнаго магнетизма въ 1889 г. въ Казани. Каз. 1890.

**Слугиновъ.** Наблюденія земнаго магнетизма въ Казани въ 1884 г. Каз. 1891.



# ОГЛАВЛЕНІЕ.

## I.

*Стр.*

Д. Гольдгаммеръ. Электромагнитная теорія свѣта . . . 261.

## II.

### Лѣтопись Физико-математическаго Общества.

Протоколы 13 — 14 засѣданій Физико-математическаго  
Общества. . . . . 67.

І. М. Первушинъ. Задача изъ теоріи чиселъ. Формула  
простыхъ чиселъ. . . . . 70.

Списокъ книгъ и періодическихъ изданій по физико-ма-  
тематическимъ наукамъ . . . . . 72.

Объявленія.

---



II 1, 2, 3, 4

Alexander Zivert

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE  
de Kasan

Deuxième série. Tome II. № 1.

506.7

722

F612

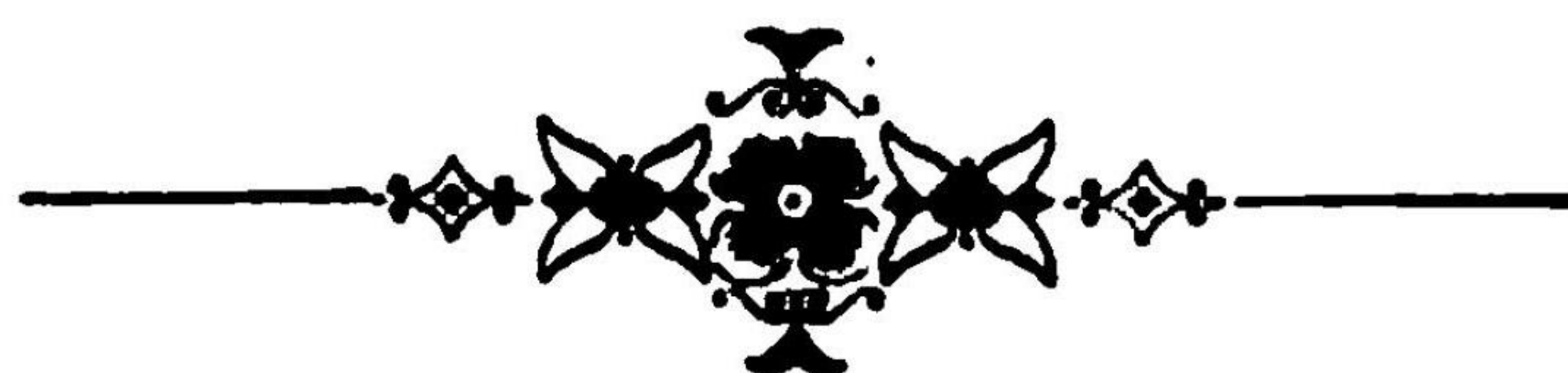
ИЗВѢСТІЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ II

№ I



КАЗАНЬ

Типографія Императорскаго Университета

1892



# СОДЕРЖАНІЕ.

## I.

**Д. Гольдгаммеръ.** Электромагнитная теорія свѣта. Естественное вращеніе плоскости поляризаціи свѣта.

**Н. Казанкинъ.** О диссоціаціи въ электролитическихъ растворахъ въ связи съ ихъ капиллярными свойствами.

**Н. Нечаевъ.** Коэффициентъ пропорціональности въ элементарной физикѣ.

## II.

### Лѣтопись Физико-математическаго Общества.

Протоколы 16—18 засѣданій Физико-математическаго Общества.

Отчетъ о дѣятельности Физико-Математическаго Общества за первый годъ его существованія: Октябрь 1890—Январь 1892.

Объявленія.

## Table des matières.

D. Goldhammer. Théorie électromagnétique de la lumière. Rotation normale du plan de polarisation de la lumière.

N. Kazankine. De la dissociation des dissolutions électrolytiques en rapport avec leurs propriétés capillaires.

N. Netchaëff. Coefficient de proportionnalité en physique élémentaire.

Procès-verbaux des séances 16—18 de la Société Physico-mathématique.  
Annonces.

---



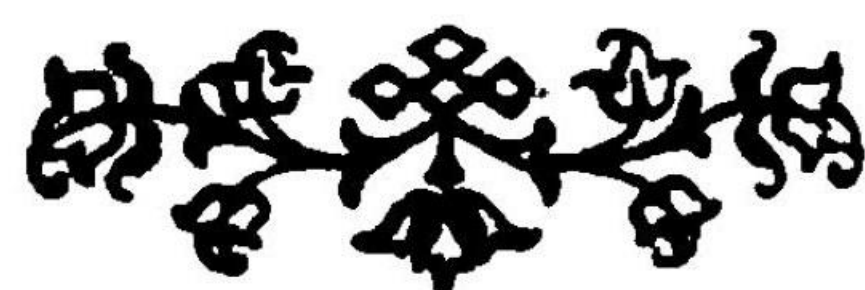
## ОГЛАВЛЕНИЕ II ТОМА.

### I.

|                                                                                                                      |          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Д. Гольдгаммеръ. Электромагнитная теорія свѣта. Естественное вращеніе плоскости поляризаціи свѣта. . . . .           | 1.       |
| Н. Казанкинъ. О диссоціаціи въ электролитическихъ растворахъ въ связи съ ихъ капиллярными свойствами. . . . .        | 33.      |
| Н. Нечаевъ. Коэффициентъ пропорціональности въ элементарной физикѣ. . . . .                                          | 42.      |
| Д. Гольдгаммеръ. Къ электромагнитной теоріи свѣта. . . . .                                                           | 51.      |
| Г. Шебуевъ. Къ вопросу о распредѣленіи температуры внутри текущей несжимаемой жидкости и омываемыхъ ею тѣлъ. . . . . | 64, 171. |
| В. Сикстель. Основныя теоремы сферической геометріи. . . . .                                                         | 94.      |
| Г. Шебуевъ. Приложение теоріи кватернионовъ къ механикѣ подобно и однородно-измѣняемыхъ системъ. . . . .             | 111.     |
| Д. Гольдгаммеръ. Элементарная теорія свѣта. . . . .                                                                  | 206.     |

### II.

|                                                                                                                                                                                         |                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Протоколы 15—24 засѣданій Физико-математическаго общества . . . . .                                                                                                                     | 1, 11, 21, 53. |
| Отчетъ о дѣятельности Физико-математическаго общества за первый годъ его существованія: октябрь 1890—январь 1892. . . . .                                                               | 5.             |
| О. Суворовъ. В. Г. Имшенецкій. † . . . .                                                                                                                                                | 15.            |
| Д. Зейлигеръ. Задачи. . . . .                                                                                                                                                           | 19, 59         |
| Д. Дубяго. Объ ученыхъ заслугахъ сэра Джоржа Биделя Эри. . . . .                                                                                                                        | 24.            |
| Д. Дубяго. Пятый спутникъ Юпитера. . . . .                                                                                                                                              | 32.            |
| Списокъ книгъ и періодическихъ изданій по физико-математическимъ наукамъ, поступившихъ въ библіотеку физико-математическаго общества за время отъ декабря 1891 по сент. 1892 г. . . . . | 33.            |
| Н. И. Лобачевскій (воззваніе). . . . .                                                                                                                                                  | 37.            |
| Памятникъ Гауссу и Веберу въ Геттингенѣ (воззваніе) . . . . .                                                                                                                           | 49.            |
| Приложеніе: Гельмгольцъ. Счетъ и измѣреніе. . . . .                                                                                                                                     |                |





BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE  
de Kasan

Deuxième série. Tome II. № 4.

Q  
60  
K21  
A2

**ИЗВѢСТІЯ**  
**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА**

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

**ВТОРАЯ СЕРІЯ**

**ТОМЪ II**

**№ 4**

**КАЗАНЬ**

**Типографія Императорскаго Университета**

**1893.**



# ОТЧЕТЪ

о дѣятельности Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Назанскомъ Университетѣ за первый годъ его существованія.

(Октябрь 1890—Январь 1892).

При открытіи своего Физико-математическаго Общества имѣло 181 члена, переименованныхъ согласно уставу Общества изъ членовъ Физико-математической секціи Общества Естествоиспытателей въ члены Физико-математическаго Общества. Въ теченіе отчетнаго времени прибыло 18 новыхъ членовъ, 3 умерло и 1 выбылъ по собственному желанію; такимъ образомъ въ началу 1892 года Общество считаетъ 195 членовъ.

Администрація Общества, избранная въ I-мъ засѣданіи (28 октября 1890 г.), состоитъ изъ слѣдующихъ лицъ:

Предсѣдатель А. В. Васильевъ; Товарищъ Предсѣдателя Ѳ. М. Суворовъ; Секретарь М. С. Сегель; Библіотекарь и Казначей Н. Ц. Казанкинъ; Члены Совѣта: Д. А. Гольдгаммеръ, А. К. Жбиковскій, И. А. Износковъ, І. А. Имшеницъ, Д. И. Дубяго, Н. Ц. Слуринъ, Г. Н. Шебуевъ; Члены ревизіонной коммисіи: Д. Л. Адамантовъ, А. М. Ковальскій, Н. В. Нечаевъ.

Въ отчетномъ году Общество имѣло 14 засѣданій, въ которыхъ было сдѣлано 42 сообщенія 26 лицами; приводимъ алфавитный перечень лицъ, дѣлавшихъ сообщенія, съ указаніемъ заглавій сообщеній:

Д. Л. Адамантовъ: О преподаваніи ариметики въ начальныхъ школахъ Франціи.

Р. О. Блажесевскій: О прямыхъ, дѣлящихъ углы треугольника пополамъ.

А. В. Васильевъ: а) Изъ исторіи и философіи понятія о цѣломъ положительномъ числѣ.



б) Отзывъ объ учебникѣ геометріи Шохоръ-Троцкаго.

*А. Н. Воробьевъ:* О годовомъ ходѣ атмосфернаго давленія и температуры въ Казани за 1890-й годъ.

*Д. А. Гольдгаммеръ:* а) Объ электромагнитной теоріи свѣта, б) о дисперсіи и абсорбціи свѣта по электромагнитной теоріи свѣта, с) о вращеніи плоскости поляризаціи по электромагнитной теоріи свѣта.

*И. П. Долбня:* Объ интегрированіи помощью эллиптическихъ функцій.

*Д. И. Дубяго:* О двойной звѣздѣ  $\beta$  Delphini.

*И. И. Зелинскій:* О пропорціональныхъ величинахъ.

*Н. П. Казанкинъ:* а) О примѣненіи психрометра къ опредѣленію молекулярныхъ вѣсовъ, б) о подъемахъ водныхъ растворовъ въ капиллярныхъ трубкахъ, с) о капиллярныхъ постоянныхъ водныхъ растворовъ солей.

*М. Я. Капустинъ:* О дифференціальномъ манометрѣ Рекнагеля въ примѣненіи къ гигиеническимъ изслѣдованіямъ.

*Р. А. Колли:* Объ электрическихъ колебаніяхъ.

*К. И. Котеловъ:* Объ атмосферномъ электричествѣ.

*А. В. Красновъ:* а) О результатахъ нивелировки, произведенной лѣтомъ 1890 года, б) о результатахъ нивелировки, произведенной лѣтомъ 1891 года.

*В. В. Куриловъ:* О дѣйствіи электрическаго тока на смѣси сѣрной кислоты съ водой.

*П. К. Криницынъ:* Практическій способъ построения сложныхъ правильныхъ многогранниковъ.

*Н. В. Нечетовъ:* О начальномъ преподаваніи алгебры.

*А. И. Павловъ:* О начальномъ обученіи дѣтей счисленію и дробямъ.

*И. Г. Пиктоветскій:* Нѣсколько словъ по поводу методики Мартынова.

*О. I. М. Чергушинъ:* О числахъ вида  $2^{2^m} + 1$ .

*И. И. Семеновъ:* а) Эпитрохональные поверхности; б) обобщеніе свойствъ эпитрохональныхъ поверхностей.

*Д. М. Ситцовъ:* О функціяхъ Бернулли съ произвольными указателями.

*Н. П. Смутиновъ:* а) Объ отвердѣваніи и температурахъ плавленія глицерина; б) о скорости затвердѣванія глицерина и его водныхъ растворовъ; с) въ теоріи сгустительнаго гигрометра; д) о дѣйствіи конденсатора на электролитическое свѣщеніе; е) замѣчанія по поводу механической теоріи отраженія и преломленія свѣта Френеля, f) объ ученыхъ трудахъ Р. А. Юли, g) о комбинаціи гальваническихъ элементовъ, h) о нѣсколькихъ формулахъ теоріи затвердѣванія и плавленія.



нія, і) критическія замѣчанія на изложеніе въ учебникахъ интерференціи волнъ.

*С. Н. Стемпневскій:* О геометрическомъ значеніи модуля сѣченія при изгибѣ и крученіи.

*Ө. М. Суворовъ:* Отзывъ о сборникѣ упражненій въ умственномъ счетѣ Н. А. Бобровникова.

*Я. П. Корнухъ-Троцкий:* а) О падающихъ звѣздахъ, б) о вычисленіи орбиты планеты Діаны.

*Г. Н. Шебуревъ:* Задача объ охлажденіи нагрѣтаго шара въ потокѣ жидкости.

Кромѣ того въ нѣсколькихъ засѣданіяхъ были демонстрированы новые приборы физическаго кабинета, а въ одномъ изъ засѣданій членами общества была осмотрѣна магнитная обсерваторія университета.

Переходимъ теперь къ изложенію состоянія денежныхъ средствъ общества.

При открытіи своемъ общество имѣло: двѣ 50 рублевая облигаціи 1-го займа и 80 р. 88 к. наличными деньгами. (Всего 180 р. 88 к. Сумма эта есть бывшій капиталъ Физ.-Мат. секціи Общ. Ест.).

Въ теченіи отчетнаго времени поступило въ кассу:

|                                                        |              |
|--------------------------------------------------------|--------------|
| Членскихъ взносовъ: за 1891 годъ отъ 47                |              |
| лицъ . . . . .                                         | 141 р.       |
| за 1892 годъ отъ 13 лицъ . . . . .                     | 37 р.        |
| за 1893 годъ отъ 3 лицъ . . . . .                      | 9 р.         |
| за 1894—1895 годы 1 . . . . .                          | 6 р.         |
| за 1890 годъ отъ 24 лицъ . . . . .                     | 72 р.        |
| за 1889 годъ отъ 5 лицъ . . . . .                      | 15 р.        |
| за 1888 годъ отъ 1 лица . . . . .                      | 3 р.         |
| Отъ 3-хъ подписчиковъ на „Извѣстія Общества“ . . . . . | 9 р.         |
| Отъ продажи изданій Общества . . . . .                 | 26 р. 15 к.  |
| %, по купонамъ двухъ 50 р. облигацій . . . . .         | 4 р. 75 к.   |
| Всего . . . . .                                        | 503 р. 78 к. |

Въ теченіе отчетнаго времени израсходовано:

|                                                                     |              |
|---------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1) На печатаніе изданій Общества: . . . . .                         | 184 р. 50 к. |
| Изъ этой суммы уплачено: типографіи университета . . . . .          | 118 р. 40 к. |
| За рисунки къ статьѣ Д. А. Гольдгаммера. . . . .                    | 21 р. 50 к.  |
| За печатаніе портрета и автографа покойнаго И. С. Громеки . . . . . | 44 р. 60 к.  |



# О Г Л А В Л Е Н І Е.

## І.

*Стр.*

|                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Д. Гольдгаммеръ. Электромагнитная теорія свѣта. Естественное вращеніе плоскости поляризаціи свѣта. . . . .  | 1.  |
| Н. Казанкинъ. О диссоціаціи въ электролитическихъ растворахъ въ связи съ ихъ капиллярными свойствами. . . . | 33. |
| Н. Нечасвъ. Коэффициентъ пропорціональности въ элементарной физикѣ. . . . .                                 | 42. |

## ІІ.

### Лѣтопись Физико-математическаго Общества.

|                                                                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Протоколы 16 — 18 засѣданій Физико-математическаго Общества. . . . .                                                            | 1. |
| Отчетъ о дѣятельности Физико - Математическаго Общества за первый годъ его существованія: Октябрь 1890—Январь 1892 г.г. . . . . | 5. |
| Объявленія.                                                                                                                     |    |

---



Списокъ книгъ и періодическихъ изданій по Физико-математическимъ наукамъ, поступившихъ въ бібліотеку Физико-Мат. Общества за время отъ декабря 1891 г. по сен. 1892.

### *I. Математика.*

#### 1) Ариѳметика.

*Якимовъ.* Разборъ курса ариѳметики Д. Адамантова, Каз. 1889.

*Якимовъ.* О таблицахъ для извлеченія квадратныхъ корней изъ чиселъ съ помощью счетъ. Каз. 1892 г.

*Якимовъ.* Характеристика задачъ въ задачникѣ Арбузова, Мининыхъ и Назарова. Каз. 1889.

*Павловъ.* Объ извлеченіи квадратн. корней изъ чиселъ съ помощью русскихъ счетъ.

#### 2) Теорія чиселъ.

*André Markoff.* Sur les nombres entiers, dépendants d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire. Спб. 1892.

Схема таблицы простыхъ чиселъ. Каз. 1891.

#### 3) Алгебра.

*Нечаевъ.* О начальномъ преподаваніи Алгебры. Спб. 1892.

*Якимовъ.* Рѣшеніе опредѣленной системы уравн. 1 степ. посредствомъ неопредѣленныхъ множителей. Каз. 1892.

*Вл. Марковъ.* О функціяхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля. Спб. 1892.

#### 4) Исчисленіе безк. малыхъ.

*Покровскій.* Теорія функцій комплекснаго переменнаго. Кіевъ. 1892.

*Покровскій.* Краткое введеніе въ теорію эллиптическихъ функцій. Кіевъ. 1881.

#### 5) Геометрія элементарная.

*Криницынъ.* Построеніе правильныхъ многогранниковъ по данному ребру. Каз. 1892.

#### 6) Теорія вѣроятностей.

*Малешевскій.* Теорія и практика пенсіонныхъ кассъ. III тома.



# ОГЛАВЛЕНІЕ.

## I.

|                                                                                                           | <i>Стр.</i> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Г. Шебуревъ. Приложение теоріи кватернионовъ къ механикѣ подобно и однородно-измѣняемыхъ системъ. . . . . | 111.        |

## II.

### Лѣтопись Физико-математическаго Общества.

|                                                                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Протоколъ 21 засѣданія Физико-математическаго Общества. . . . .                                                                                        | 21. |
| Д. Дубяго. Объ ученыхъ заслугахъ Сэра Джорджа Биделя Эри . . . . .                                                                                     | 24. |
| Д. Дубяго. Пятый спутникъ Юпитера. . . . .                                                                                                             | 32  |
| Списокъ книгъ и періодическихъ изданій, поступившихъ въ библіотеку Физико - математическаго Общества за время отъ декабря 1891 по сент. 1892 . . . . . | 33. |
| Н. И. Лобачевскій (воззваніе) . . . . .                                                                                                                | 37. |
| Памятникъ Гауссу и Веберу въ Геттингенѣ (воззваніе) .                                                                                                  | 49. |
| Приложеніе: Гельмгольцъ. Счетъ и измѣреніе.                                                                                                            |     |

---